Aplicaciones del modelo de sine-Gordon en la mecánica estadística de sistemas de Coulomb

Juan A. Guzmán

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogota, Colombia
2022

Aplicaciones del modelo de sine-Gordon en la mecánica estadística de sistemas de Coulomb

Juan A. Guzmán

Director(a):
Dr. Gabriel Tellez
Revisor(a):
Neelima Kelkar Ph.D.

Línea de Investigación:
Sistemas de Coulomb
Grupo de Investigación:
Física Estadística

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogota, Colombia
2022

Resumen

En el presente articulo se hizo un estudio de la equivalencia entre el modelo de sine-Gordon y los sistemas de Coulomb. Para esto, se partió de la función de partición gran canónica de la teoría de partículas en la que se encuentran los sistemas de Coulumb y, a través de la transformación de Hubbard-Stratonovich, se llego a una función de partición canónica en la teoría de campos, donde se demostró que el modelo de sine-Gordon es equivalente al modelo de campo de los sistemas de Coulomb, esto debido a que ambas funciones de partición coinciden. A partir de esto es posible encontrar aplicaciones del modelo de sine-Gordon, un modelo ampliamente estudiado, a el estudio de los sistemas de Coulomb.

Palabras clave: Sistemas de Coulomb, modelo de sine-Gordon, funciones de partición, transformacion de Hubbard-Stratonovich.

Abstract

This article presents a study of the equivalence between the sine-Gordon model and Coulomb systems. For this, we started from the grand canonical partition function of the particle theory in which the Coulumb systems are found and, through the Hubbard-Stratonovich transformation, we arrived at a canonical partition function in the field theory, where it was shown that the sine-Gordon model is equivalent to the field model of Coulomb systems, because both partition functions coincide. From this it is possible to find applications of the sine-Gordon model, a widely studied model, to the study of Coulomb systems.

Keywords: Coulomb systems, sine-Gordon model, partition function, Hubbard-Stratonovich transformation.

Contenido

1 Introducción

En la física encontramos diversas áreas de estudio como lo es la mecánica clásica, la mecánica cuántica o la mecánica estadística; esta ultima es una rama que nace a partir de las herramientas matemáticas de la teoría de la probabilidad y la estadística, cuyo enfoque es tratar con grandes poblaciones y aproximaciones, con esto se logra el estudio de la materia como conjunto, obteniendo así resultados de la termodinámica a partir de un tratamiento probabilístico.
De la mecánica estadística se obtiene un funcional muy importante y útil para el estudio de diversos sistemas, este es la función de partición, el cual esta definido como

$$Z = \sum_s e^{-\beta \epsilon_s}, \tag{1-1}$$

donde se hace una suma de los factores de Boltzmann $e^{-\beta \epsilon_s}$ dependientes de las energías ϵ_s de cada uno de los microestados s, con un β definido como el inverso de la temperatura por la constante de Boltzmann

$$\beta = \frac{1}{k_B T}. \tag{1-2}$$

Esta función de partición es un funcional de un sistema en equilibrio cuyo interés radica en que permite derivar las diversas ecuaciones de estado del sistema como la entropía, la energía libre, la presión, entre otras. [1]

1.1. Modelos exactamente solubles

A pesar de la naturaleza de aproximaciones que se toma en este campo, existen modelos los cuales permiten un tratamiento analítico completo que no recurre a aproximaciones, estos modelos se conocen como modelos exactamente solubles. Estos modelos son de gran importancia dado que permiten la verificación de resultados de modelos aproximados y permiten el desarrollo en otros campos de la ciencia. [2]
El modelo exactamente soluble de estudio para este articulo es el de los sistemas de coulomb, el cual describe un sistema que consta de una colección de partículas cargadas que interactúan a través de la interacción de Coulomb. El interés en este sistema radica principalmente en su desarrollo matemático el cual lleva a encontrar relaciones con otros modelos

usados en otros campos, además de que el este permite describir sistemas físicos como soluciones de electrolitos o plasmas ionizados.[2]

1.2. Modelo de sine-Gordon

El modelo de sine-Gordon es un modelo usado en la teoría de campos, el cual es un derivado de la ecuación de Klein-Gordon a la que se le incluye un factor de interacción de seno, dejándolo como una ecuación de campo con un factor no lineal. Al ser descrito en una dimensión $1 + 1$ espacio-temporal adquiere la siguiente forma

$$\phi_{xx} + \phi_{tt} + \sin\phi = 0, \tag{1-3}$$

donde ϕ_{xx} y ϕ_{tt} representa la segunda derivada del campo con respecto a la variable indicada. [3]

Este modelo presentado encuentran una relación matemática con el modelo de sistemas de Coulomb dados por sus funciones de partición, esto permite describir una analogía física entre ambos modelos. Con esto podemos, como el titulo del articulo lo indica, encontrar aplicaciones del modelo de sine-Gordon en la mecánica estadística de sistemas de Coulomb a través de la función de partición de cada sistema, permitiendo relacionar cantidades termodinámicas y otras propiedades.

1.3. Teoría de distribuciones

Para el desarrollo matemático fluido de este articulo es necesario incluir el concepto de distribuciones. En el análisis matemático la teoría de distribuciones nace con el motivo de poder derivar funciones no derivables, por lo tanto las distribuciones surgen como una generalización de las funciones, esto permite extender varios conceptos provenientes del álgebra lineal y el calculo [4]. Inicialmente podemos introducir una distribución bien conocida, el delta de Dirac $\delta(x)$, esta distribución cumple la propiedad

$$f(a) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) f(x) dx. \tag{1-4}$$

Por otro lado podemos extender los conceptos de producto escalar y producto matricial haciendo uso de la siguiente notación

$$(f(x), g(x)) = \int f(x) g(x) dx, \tag{1-5}$$

$$A(x) * f(x) = \int A(x-x') f(x') dx', \tag{1-6}$$

donde la ecuación 1-5 juega el papel equivalente al producto escalar extendido a distribuciones y la ecuación 1-6, conocida como convolución, juega el equivalente al producto matricial, donde la distribución $A(x)$ cumple el rol de la matriz. Con esto es posible obtener la siguiente relación

$$(g(x), B(x) * g(x)) = \int g(x)B(x - x')g(x')dxdx', \tag{1-7}$$

la cual representaría que la distribución $B(x)$ se comporta como una forma bilineal actuando sobre $g(x)$.

2 Sistemas de Coulomb

Como ya se menciono en la introducción, un sistema de Coulomb es una colección de partículas cargadas que se ven envueltas en la interacción de Coulomb. Por lo tanto, para su estudio es esencial estudiar primero el potencial de Coulomb, potencial que rige esta interacción. El potencial de Coulomb nace como solución a la ecuación de Poisson

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -s_d \delta(\mathbf{r}), \tag{2-1}$$

donde $\Delta = \nabla^2$ es el laplaciano y $s_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ el inverso del área de una esfera unitaria de dimensión d, que actúa como la permitividad del vació en unidades gaussianas. Esta ecuación presenta la siguiente solución para un caso sin fronteras

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{d-2}\frac{1}{r^{d-2}}, & r \neq 2 \\ -\ln(\frac{r}{r_0}), & r = 2 \end{cases}, \tag{2-2}$$

donde r_0 representa una constante arbitraria que fija el cero del potencial. Estas soluciones resultan interesantes para el caso en $d = 1, 2, 3$, donde con $d = 1$ se presenta una proporcionalidad directa entre el radio y el potencial $V(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}$, con $d = 2$ como se observa en 2-2 se presenta una comportamiento logarítmico y para $d = 3$ se presenta el comportamiento inversamente proporcional al radio $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathbf{r}}$. Para $d \geq 3$ se presenta un caso similar el cual pude ser comprendido desde el caso $d = 3$.[5]
Por otro lado, podemos notar que la ecuación de Poisson 2-1 puede ser reescrita haciendo uso de la ecuación 1-6 terminando de la forma

$$\Delta\delta(r) * V(r) = -s_d \delta(r), \tag{2-3}$$

por lo tanto es posible el estudio de la ecuación de Poisson en el mundo de las distribuciones. De igual forma es posible identificar que el inverso de convolución del potencial de Coulomb tiene esta dado por

$$V^-1(r) = -\frac{\Delta}{s_d}, \tag{2-4}$$

este inverso resultara de gran utilidad en capítulos posteriores cuando se haga una transformación a este potencial.

2.1. Estabilidad del sistema

Si se esta estudiando un sistema de muchas partículas interactuando es necesario hacer un estudio de la estabilidad del sistema y cuales casos resultan pertinentes de estudio. Inicialmente, si el sistema contiene partículas con cargas de signo opuesto, se encontrara fuertes atracciones entre estas, esto puede producir divergencias en la energía potencial para dimensiones $d \geq 2$, lo que produce una implosión del sistema. Clásicamente, para solucionar este problema es necesario incluir una interacción repulsiva de corto alcance para evitar este colapso. También cabe destacar que si nos encontramos en dimensión $d = 1$, este colapso no se presenta dado a la proporcionalidad del potencial con el radio.[2]
Por otro lado, también resulta necesario considerar que el sistema no explote por la repulsión por partículas de mismo signo, para evitar este colapso es necesario que el sistema sea globalmente neutro, por lo tanto, para los fines de este articulo se va a estudiar un sistema neutro que no presente irregularidades, para esto se requiere que la fugacidad positiva y negativa del sistema sea igual, de este modo encontramos que $\zeta_+ = \zeta_- = \zeta$.[6]
Por lo tanto, el modelo exactamente soluble de sistema de Coulomb que se va a estudiar es el plasma de dos componentes. Este presentara proporción simétrica entre las cargas de cada tipo, en la que se presentan dos especies de partículas, carga q y carga $-q$.

2.2. Hamiltoniano de Coulomb

Inicialmente sabemos que el sistema consta de una colección de partículas puntuales cargadas, por lo tanto podemos definir la densidad de carga del sistema como la suma de todas estas cargas en su respectiva posición

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_+} q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^+) - \sum_{j=1}^{N_-} q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^-), \tag{2-5}$$

donde se descompone la suma en las partículas con carga positiva y negativa, por lo tanto la suma presenta un numero de partículas N_+ y N_- respectivamente. Por otro lado, podemos definir el hamiltoniano del sistema como la suma de las energías de interacción entre las partículas

$$H = \sum_{1\leq j\leq k\leq N_+} q^2 V(|\mathbf{r}_j^+ - \mathbf{r}_k^+|) + \sum_{1\leq j\leq k\leq N_-} q^2 V(|\mathbf{r}_j^- - \mathbf{r}_k^-|) - \sum_{j=1}^{N_+}\sum_{k=1}^{N_-} q^2 V(|\mathbf{r}_j^+ - \mathbf{r}_k^-|). \tag{2-6}$$

Podemos observar que este consta de tres sumatorios, el primer termino dado por la interacción entre partículas de mismo signo positivo, el segundo por la interacción entre mismo signo negativo y el tercer y ultimo termino como la interacción entre cargas opuestas. Por otro lado, podemos notar que el hamiltoniano de la ecuación 2-6 presenta una forma cuadrática de la densidad de carga de la ecuación 2-5, donde el potencial de Coulomb se comporta como una forma bilineal actuando sobre la densidad de carga, por lo tanto podemos reescribir el hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})V(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\rho(\mathbf{r}')drdr' - (N_+ + N_-)q^2V(0), \tag{2-7}$$

donde el factor $(N_+ + N_-)q^2V(0)$ representa un termino de auto-energía de cada partícula que se debe restar para eliminar los términos de la integral, cuando $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, que no están incluidos en la energía originalmente. Haciendo uso de la notación introducida en la ecuación 1-7, podemos entonces escribir el hamiltoniano como

$$H = \frac{1}{2}(\rho(\mathbf{r}), V(\mathbf{r}) * \rho(\mathbf{r})) - H_0, \tag{2-8}$$

donde $H_0 = (N_+ + N_-)q^2V(0)$ es el factor ya mencionado. [7]

2.3. Función de partición gran canónica

A partir del hamiltoniano hallado en la ecuación 2-8 podemos definir el siguiente factor de Boltzmann para los sistemas de Coulomb

$$e^{-\beta H} = e^{-\frac{\beta}{2}(\rho(\mathbf{r}),V(\mathbf{r})*\rho(\mathbf{r}))+\beta H_0}. \tag{2-9}$$

Este factor de Boltzmann nos permitirá encontrar la función de partición gran canónica, la cual se encuentra dada como

$$Z_{gC} = \sum_{N_+=0}^{\infty}\sum_{N_-=0}^{\infty}\frac{\zeta_+^{N_+}\zeta_-^{N_-}}{N_+!N_-!}\int e^{-\beta H}\prod_{j=1}^{N_+}d\mathbf{r}_j^+\prod_{k=1}^{N_-}d\mathbf{r}_k^-. \tag{2-10}$$

De este modo usando las ecuaciones 2-9 y 2-10, terminamos con

$$Z_{gC} = \sum_{N_+=0}^{\infty}\sum_{N_-=0}^{\infty}\int\frac{\zeta_+^{N_+}\zeta_-^{N_-}}{N_+!N_-!}e^{-\frac{\beta}{2}(\rho(\mathbf{r}),V(\mathbf{r})*\rho(\mathbf{r}))+\beta H_0}\prod_{j=1}^{N_+}d\mathbf{r}_j^+\prod_{k=1}^{N_-}d\mathbf{r}_k^-, \tag{2-11}$$

esta ecuación describe el funcional generatriz de partición gran canónico para sistemas de Coulomb de plasma de dos componentes.

3 Modelo de sine-Gordon

La ecuación de sine-Gordon es una ecuación ampliamente usada para el modelado de diversos fenómenos físicos. Con el paso del tiempo ha sido entendido que la ecuación de sine-Gordon es uno de los modelos mas fundamentales de la física matemática moderna gracias a su amplio uso en la teoría de campos. [3].
La ecuación de sine-Gordon, que ya fue presentada previamente en la introducción (ecuación 1-3), puede ser escrita en este contexto de la forma

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) + 2s_d zq\sin(\beta q\phi(\mathbf{r})) = 0, \tag{3-1}$$

donde z representa la fugacidad del sistema y s_d el área de la esfera de dimensión d en la que se encuentra el sistema. Podemos entender esos factores que acompañan al seno como el factor de masa que se incluye en la ecuación de sine-Gordon o Klein-Gordon cuando se hace un estudio de partículas masivas, es decir, como se estudian partículas puntuales, la carga de las partículas juega el papel de masa ya que la interacción entre estas esta dado por esta cantidad.

3.1. Función de partición

La ecuación de sine-Gordon 3-1, puede ser derivada como la ecuación de movimiento dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange, donde el lagrangiano de sine-Gordon L_{sG} presenta la siguiente forma

$$L_{sG} = -\frac{\beta}{2s_d}\phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}) - 2z\cos(\beta q\phi(\mathbf{r})). \tag{3-2}$$

Por lo tanto, haciendo uso de este lagrangiano podemos definir el factor de Boltzmann del sistema como la exponencial de la integral de volumen de este lagrangiano

$$e^{-\int L_{sG}(\phi(\mathbf{r}),\partial_\mu\phi(\mathbf{r}))d\mathbf{r}}, \tag{3-3}$$

y así, usando la definición de la ecuación 1-1 junto con lo obtenido en la ecuación 3-3 podemos obtener la siguiente expresión

$$Z_{sG} = \int D\phi e^{-\int L_{sG}d\mathbf{r}}, \tag{3-4}$$

la cual representa el funcional generatriz de partición canónico para este modelo. [8]

4 Transformación de Hubbard-Stratonovich

La transformación de Hubbard-Stratonovich es una transformación matemática desarrollada por el físico Ruslan L. Stratonovich y popularizada por el físico John Hubbard. Esta transformación es utilizada en la física para convertir una teoría de partículas en su respectiva teoría de campo, con esta se linealiza el operador de densidad en el término de interacción del hamiltoniano y se introduce un campo escalar. Esta transformación nace de la integral Gaussiana

$$e^{\frac{1}{2}(x,M^{-1}x)} = \frac{\int D\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi,M\phi)+(x,\phi)}}{\int D\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi,M\phi)}}, \tag{4-1}$$

tomando x como la densidad en el termino de interacción, M^{-1} como potencial que produce la interacción y ϕ el campo escalar el cual juega el papel de campo del modelo.[9][10]

4.1. Redefinición del factor de Boltzmann

Si identificamos que $x = \beta\rho$ y $M^{-1} = \frac{V(\mathbf{r})}{\beta}$ de la ecuación 4-1, obtenemos que la teoría de campos respectiva a los sistemas de Coulomb presenta entonces un campo $i\phi(\mathbf{r})$, donde a partir de la ecuación 2-4 reconocemos que $M = -\frac{\beta\Delta}{s_d}$, y por lo tanto el factor de Boltzmann para sistemas de Coulomb 2-9 puede ser transformado de la forma

$$e^{-\frac{1}{2}(\beta\rho(\mathbf{r}),\frac{V(\mathbf{r})}{\beta}*\beta\rho(\mathbf{r}))+\beta H_0} = \frac{\int D\phi e^{\frac{\beta}{2s_d}(\phi(\mathbf{r}),\Delta\phi(\mathbf{r}))-i\beta(\rho(\mathbf{r}),\phi(\mathbf{r}))}e^{\beta H_0}}{\int D\phi e^{\frac{\beta}{2s_d}(\phi(\mathbf{r}),\Delta\phi(\mathbf{r}))}}. \tag{4-2}$$

Tomando las siguientes definiciones

$$Z_0 = \int D\phi e^{\frac{\beta}{2s_d}(\phi(\mathbf{r}),\Delta\phi(\mathbf{r}))}, \tag{4-3}$$

$$\kappa(\phi(\mathbf{r})) = e^{\frac{\beta}{2s_d}(\phi(\mathbf{r}),\Delta\phi(\mathbf{r}))} = \exp\left(\int \frac{\beta}{2s_d}\phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}\right), \tag{4-4}$$

Podemos reescribir la ecuación 4-2 de la forma

$$e^{-\frac{1}{2}(\beta\rho(\mathbf{r}),\frac{V(\mathbf{r})}{\beta}*\beta\rho(\mathbf{r}))+\beta H_0} = \frac{\int D\phi\kappa(\phi(\mathbf{r}))e^{-i\beta(\rho(\mathbf{r}),\phi(\mathbf{r}))}e^{\beta H_0}}{Z_0}. \tag{4-5}$$

donde κ juega el papel de factor de Boltzmann para un campo sin interacción y Z_0 juega de su respectiva función de partición para este mismo campo, esta función de partición puede ser considerada un factor de normalización. Por otro lado, observando la exponencial resultante, podemos observar que el exponente resultante puede ser reescrito de la forma

$$\begin{aligned}
(\rho(\mathbf{r}),\phi(\mathbf{r})) &= \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \int \left[\sum_{j=1}^{N_+} q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^+) - \sum_{j=1}^{N_-} q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^-)\right]\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \sum_{j=1}^{N_+} q\int \phi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^+)d\mathbf{r} - \sum_{j=1}^{N_-} q\int \phi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^-)d\mathbf{r} \\
&= \sum_{j=1}^{N_+} q\phi(\mathbf{r}_j^+) - \sum_{j=1}^{N_-} q\phi(\mathbf{r}_j^-).
\end{aligned} \tag{4-6}$$

Finalmente, resultamos entonces con que el factor de Boltzmann puede ser escrito como

$$e^{-\frac{1}{2}(\beta\rho(\mathbf{r}),\frac{V(\mathbf{r})}{\beta}*\beta\rho(\mathbf{r}))+\beta H_0} = \frac{1}{Z_0}\int D\phi\kappa(\phi(\mathbf{r}))\exp(-i\beta\sum_{j=1}^{N_+} q\phi(\mathbf{r}_j^+) + i\beta\sum_{j=1}^{N_-} q\phi(\mathbf{r}_j^-))e^{\beta H_0}. \tag{4-7}$$

4.2. Conexión entre modelos

A partir de la redefinición del factor de Boltzmann 4-7 encontrada previamente, y haciendo uso de la función de partición gran canónica para los sistemas de Coulomb de plasma de dos componentes 2-11, podemos encontrar que esta función resulta entonces en

$$Z_{gC} = \sum_{N_+,N_-=0}^{\infty}\int \frac{\zeta_+^{N_+}\zeta_-^{N_-}}{N_+!N_-!}\int D\phi\frac{\kappa e^{\beta H_0}}{Z_0}e^{-i\beta[\sum_{j=1}^{N_+} q\phi(\mathbf{r}_j^+)-\sum_{j=1}^{N_-} q\phi(\mathbf{r}_j^-)]}\prod_{j=1}^{N_+} d\mathbf{r}_j^+\prod_{k=1}^{N_-} d\mathbf{r}_j^-, \tag{4-8}$$

reordenando los términos de la integral y los sumatorios podemos terminar con la expresión

$$Z_{gC} = \int D\phi\sum_{N_+,N_-=0}^{\infty}\int \frac{\zeta_+^{N_+}\zeta_-^{N_-}}{N_+!N_-!}\frac{\kappa e^{\beta H_0}}{Z_0}e^{-i\beta[\sum_{j=1}^{N_+} q\phi(\mathbf{r}_j^+)-\sum_{j=1}^{N_-} q\phi(\mathbf{r}_j^-)]}\prod_{j=1}^{N_+} d\mathbf{r}_j^+\prod_{k=1}^{N_-} d\mathbf{r}_j^-. \tag{4-9}$$

Trabajando con los términos dentro del sumatorio es posible llegar a la expresión

$$\begin{aligned}
&\sum_{N_+,N_-=0}^{\infty}\frac{(\zeta_+ e^{\beta H_0/2})^{N_+}}{N_+!}\int e^{-iq\beta\sum_{N_+}\phi(\mathbf{r}^+)}\prod_{N_+}d\mathbf{r}^+\frac{(\zeta_- e^{\beta H_0/2})^{N_-}}{N_-!}\int e^{iq\beta\sum_{N_-}\phi(\mathbf{r}^-)}\prod_{N_+}d\mathbf{r}^-\\
&=\sum_{N_+=0}^{\infty}\frac{(\zeta_+ e^{\beta H_0/2})^{N_+}(\int e^{-iq\beta\phi(\mathbf{r})}d\mathbf{r})^{N_+}}{N_+!}\sum_{N_-=0}^{\infty}\frac{(\zeta_- e^{\beta H_0/2})^{N_-}(\int e^{iq\beta\phi(\mathbf{r})}d\mathbf{r})^{N_-}}{N_-!}\\
&=\exp[(\zeta_+ e^{\beta H_0/2}\int e^{-iq\beta\phi(\mathbf{r})}d\mathbf{r})+(\zeta_- e^{\beta H_0/2}\int e^{iq\beta\phi(\mathbf{r})}d\mathbf{r})],
\end{aligned}\tag{4-10}$$

y si retomamos lo hablado en la discusión de estabilidad, requerimos que las fugacidades sean iguales para asegurar neutralidad de carga en el sistema, por lo tanto $\zeta_+ = \zeta_- = \zeta$, de este modo tenemos que

$$\exp[(\zeta_+ e^{\beta H_0/2}\int e^{-iq\beta\phi(\mathbf{r})}d\mathbf{r})+(\zeta_- e^{\beta H_0/2}\int e^{iq\beta\phi(\mathbf{r})}d\mathbf{r})]=\exp[\int 2\zeta e^{\beta H_0}\cos(\beta q\phi)d\mathbf{r}].\tag{4-11}$$

Por lo tanto, redefiniendo la fugacidad al absorber el factor de auto-energía de la forma $z=\zeta e^{\beta H_0}$, la función generatriz de partición gran canónica resulta en

$$\begin{aligned}
Z_{gC}&=\frac{1}{Z_0}\int D\phi\kappa(\phi(\mathbf{r}))\exp(\int 2z\cos(\beta q\phi(\mathbf{r}))d\mathbf{r})\\
&=\frac{1}{Z_0}\int D\phi\exp(\int\frac{\beta}{2s_d}\phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r})\exp(\int 2z\cos(\beta q\phi(\mathbf{r}))d\mathbf{r})\\
&=\frac{1}{Z_0}\int D\phi e^{-\int L_{sG}d\mathbf{r}}\\
&=\frac{Z_{sG}}{Z_0}.
\end{aligned}\tag{4-12}$$

De este modo observamos una igualdad entre la función generatriz de partición del modelo de sine-Gordon y la función de partición gran canónica de los sistemas de Coulomb de plasma de dos componentes, esto nos presenta una equivalencia entre modelos.[5][7][8]

5 Aplicaciones

La relación obtenida en la ecuación 4-12 presenta una herramienta poderosa para mapear propiedades entre modelos, aprovechando los diferentes métodos desarrollados para presentar soluciones y propiedades de estos. Esto permite el desarrollo de una de las formas de describir una distribución espacialmente no homogénea de un sistema de partículas que interactúan, usando un método que emplea la representación Hubbard-Stratonovich de la función de partición. [11]

5.1. Plasma de dos componentes en 2D

En el articulo de L. Samaj [8], se hace un estudio de las propiedades termodinámicas del plasma de dos componentes en dos dimensiones, de donde es posible obtener un gran potencial ω, el cual esta definido como

$$\omega = -\frac{1}{V}\ln(Z_{gC}). \tag{5-1}$$

Este gran potencial resulta siendo idéntico a la energía del estado fundamental del modelo cuántico de sine-Gordon en dimensión 1+1, por lo que es posible identificar que este potencial esta relacionado con la masa M de un soliton de la forma

$$\omega = -\frac{M^2}{4}\tan\left(\frac{\pi\beta}{2(4-\beta)}\right). \tag{5-2}$$

Retomando que el parámetro de fugacidad z esta relacionado con la masa M del soliton [12], a través de la ecuación

$$z = \frac{\Gamma(\beta/4)}{\pi\Gamma(1-\beta/4)}\left[M\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2(4-\beta)})}{2\Gamma(\frac{\beta}{2(4-\beta)})}\right]^{2(1-\beta/4)}, \tag{5-3}$$

llegamos entonces a que el gran potencial ω en términos de la fugacidad z y el inverso de la temperatura β esta dado por

$$-\omega = \left(1-\frac{\beta}{4}\right)\left[2z\left(\frac{\pi\beta}{8}\right)^{\beta/4}\frac{\Gamma(1-\beta/4)}{\Gamma(1+\beta/4)}\right]^{\frac{1}{1-\beta/4}}\frac{2(4-\beta)\tan(\frac{\pi\beta}{2(4-\beta)})}{\beta}\frac{\Gamma^2(1+\frac{\beta}{2(4-\beta)})}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2(4-\beta)})}. \tag{5-4}$$

Con esto podemos obtener la relación entre la densidad de partículas n y la fugacidad z a través de la relación

$$n = z\frac{\partial(-\omega)}{\partial z}, \tag{5-5}$$

lo que lleva a una ecuación de la forma

$$\frac{n^{1-\beta/4}}{z} = 2\left(\frac{\pi\beta}{8}\right)^{\beta/4}\frac{\Gamma(1-\beta/4)}{\Gamma(1+\beta/4)}\left[\frac{2(4-\beta)\tan(\frac{\pi\beta}{2(4-\beta)})}{\beta}\frac{\Gamma^2(1+\frac{\beta}{2(4-\beta)})}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2(4-\beta)})}\right]^{1-\beta/4}, \tag{5-6}$$

por lo tanto, podemos obtener una de las ecuaciones de estado para el plasma de dos componentes en dos dimensiones, donde se presenta la relación entre densidad de partículas, la fugacidad y la temperatura del sistema. [8]

De igual forma, este gran potencial permite el estudio termodinámico si recordamos que es posible pasar del ensamble gran canónico al canónico a través de una transformada de Legendre de la forma

$$F(T, N) = \Omega + \mu N \tag{5-7}$$

donde $\Omega = k_BTV\omega$, $\mu = k_BT\ln(z)$ y, con una re-definición del gran potencial usando las ecuaciones 5-4 y 5-6, $-\omega = (1-\beta/4)n$. De esta forma la energía libre f, definida por $f = F/(Nk_BT)$, esta dada como

$$\begin{aligned} f = &-\left(1-\frac{\beta}{4}\right) + \left(1-\frac{\beta}{4}\right)\ln(n) - \ln\left[2\left(\frac{\pi\beta}{8}^{\beta/4}\frac{\Gamma(1-\frac{\beta}{4})}{\Gamma(1+\frac{\beta}{4})}\right)\right] \\ &-\left(1-\frac{\beta}{4}\right)\ln\left[\frac{2(4-\beta)\tan(\frac{\pi\beta}{2(4-\beta)})}{\beta}\frac{\Gamma^2(1+\frac{\beta}{2(4-\beta)})}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2(4-\beta)})}\right]. \end{aligned} \tag{5-8}$$

Con esto podemos obtener el calor especifico por partícula a volumen constante $c_V = C_V/N$ a partir de su definición

$$\frac{c_V}{k_B} = -\beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}, \tag{5-9}$$

y obtener como resultado

$$\begin{aligned} \frac{c_V}{k_B} = &\frac{\beta}{4} + \frac{4}{4-\beta} + \frac{\beta^2}{16}\left[\psi^{(1)}(1-\beta/4) - \psi^{(1)}(1+\beta/4)\right] \\ &-\frac{2\beta^2}{(4-\beta)^3}\left[\psi^{(1)}(\frac{2}{4-\beta}) - \psi^{(1)}(\frac{8-\beta}{8-2\beta})\right] - \frac{4\pi^2\beta^2}{(4-\beta)^3}\frac{\cos(\frac{\pi\beta}{4-\beta})}{\sin^2(\frac{\pi\beta}{4-\beta})}, \end{aligned} \tag{5-10}$$

donde $\psi^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2}{(x+j)^2}$.

6 Conclusiones

En este articulo se presento una equivalencia entre el modelo de sine-Gordon y los sistemas de Coulomb de plasma de dos componentes, donde se encuentra una proporcionalidad entre las funciones de partición, demostrando entonces una similitud en propiedades termodinámicas derivadas de esta. Esta equivalencia puede ser entendida de manera que el modelo de sine-Gordon juega el papel de teoría de campos del modelo de partículas propuesto en los sistemas de Coulumb, por lo tanto, concuerda el hecho de que se coincida en propiedades de los sistemas. De igual forma, a través de conocimientos desarrollos en el estudio de estos modelos, esta conexión permitió la obtención de ecuaciones de estado y propiedades termodinámicas de los sistemas de Coulomb en el caso de plasma de dos componentes en dos dimensiones, como lo es la densidad de partículas en términos de la fugacidad y la temperatura 5-6, o el calor especifico del sistema 5-10.
Por otro lado, como se menciono previamente, el modelo de sine-Gordon es un modelo ampliamente usado en la teoría de campos, el cual presenta equivalencia con muchos otros problemas, por lo que a través de este, y de la transformación de Hubbard-Stratonovich que permite hacer esa transición de una teoría de partículas a una de campos, es posible encontrar equivalencia con muchos otros modelos, como lo es el modelo de Thirring masivo en dos dimensiones [8].
Por ultimo, es importante notar que en el articulo se trabajo con modelos exactamente solubles, por lo tanto los resultados obtenidos nacen de soluciones analíticas, y de este modo estos resultados resultan útiles para la aproximación de otros modelos en torno a estos, además de que esto permiten la verificación experimental de los resultados obtenidos.

Bibliografía

[1] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics.* McGraw-Hill, 1965.

[2] G. Tellez, "Modelos exactamente solubles en mecánica estadística de sistemas de coulomb," *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, FAsicas y Naturales*, vol. 37, pp. 61 – 74, 03 2013.

[3] J. Cuevas-Maraver, P. Kevrekidis, and F. Williams, *The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics.* Springer, 01 2014.

[4] G. López, "Apuntes de teoría de distribuciones,"

[5] L. Varela, "Sistemas de coulomb en una y dos dimensiones: resultados exactos," noviembre 2021.

[6] J. Lebowitz and E. Lieb, "Existence of thermodynamics for real matter with coulomb forces," *Physical Review Letters - PHYS REV LETT*, vol. 22, pp. 579–582, 01 2005.

[7] G. Tellez, "Mecánica estadística," 2021.

[8] L. Šamaj and I. Travěnec, "Thermodynamic properties of the two-dimensional two-component plasma," 2000.

[9] R. L. Stratonovich, "On a method of calculating quantum distribution functions," 1957.

[10] J. Hubbard, "Calculation of partition functions," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 3, pp. 77–78, Jul 1959.

[11] B. Lev and A. Zagorodny, "Statistical description of coulomb-like systems," *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 84, p. 061115, 12 2011.

[12] A. B. ZAMOLODCHIKOV, "Mass scale in the sine–gordon model and its reductions," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 10, no. 08, pp. 1125–1150, 1995.