



Solitones en la solución clásica de sine-Gordon

Diego M. López J.

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogota, Colombia
2022

Solitones en la solución clásica de sine-Gordon

Diego M. López J.

Director(a):

Dr. Gabriel Tellez

Revisor(a):

Neelima Kelkar Ph.D.

Línea de Investigación:

Física Estadística

Grupo de Investigación:

Física Estadística

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogota, Colombia

2022

Resumen

En este documento se desarrolló la solución analítica exacta correspondiente a la solución clásica de la ecuación de sine-Gordon. Además, se estudiaron los solitones como ondas viajeras que son una solución a la ecuación de sine-Gordon, y un estudio de las simetrías del sistema que corresponde a la descripción de una partícula relativista. Finalmente, se estudió la estabilidad de soluciones solitónicas.

Palabras clave: Solitones, kink, antikink, carga topológica.

Abstract

In this document, the exact analytical solution corresponding to the classical solution of the sine-Gordon equation was developed. In addition, solitons were studied as traveling waves that are a solution to the sine-Gordon equation, and a study of the symmetries of the system that corresponds to the description of a relativistic particle. Finally, the stability of soliton solutions was studied.

Keywords: Solitons, kink, antikink, topological charge.

Contenido

Resumen	v
1 Introducción	2
2 Método del pseudo-potencial. Solución kink y antikink para $E = 2$	4
3 Soluciones exactas no localizadas en el espacio $E \neq 2$	7
4 Leyes de conservación e invarianza de Lorentz	10
5 Estabilidad del soliton	13
6 Conclusiones	15
Bibliografía	16

1 Introducción

Los solitones son ondas que tienen algunas propiedades como su velocidad y amplitud se mantiene constantes, incluso cuando interactúan con otros solitones, su energía puede ser localizada y todas las características de la onda (momentum, velocidad, y posición) pueden ser descritas sabiendo la evolución temporal del centro de masa de las ondas [1].

Este fenómeno fue por primera vez estudiado por John Scott Russell (1808-1882)[1], un ingeniero quien estaba estudiando la relación entre la velocidad de una barcaza tirada por caballos con respecto a la energía de propulsión a lo largo de un canal, por casualidad, al observar que la barcaza se detuvo repentinamente vio que la masa de agua que viajaba por el canal seguía una trayectoria con una velocidad constante sin cambiar la elevación de la masa de agua. No fue hasta que Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) y su estudiante Gustav de Vries (1866-1934)[2], matemáticamente describieron las ecuaciones diferenciales parciales que dan origen a la ecuación de movimiento de esta onda (KdV equation) [1][3].

El término soliton viene de la palabra “solitary” porque es una onda que viaja sola e inalterable y el sufijo “on” es debido a su naturaleza vista como partícula[1][4].

El Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou FPUT problema fue llevado a cabo en los Alamos en estados unidos después de la denotaciones de las bombas nucleares, crearon una computadora llamada Maniac para propósitos armamentísticos y hacer predicciones de la física estadística específicamente en el problema FPUT se estudió un sistema de 64 péndulos acoplados y querían ver que ocurría con la energía cuando se introducía a este sistema, lo que asumieron que ocurriría es que la energía se distribuiría en todos los modos de Fourier del péndulo debido a que era un sistema no lineal. Sin embargo, lo que observaron es que la energía estaba localizada y retornaba a el modo de Fourier de oscilación del principio después de un tiempo, este fenómeno tal vez se debía a la propia no linealidad del sistema [1]. El resultado de esta investigación fue que este tipo de ondas tiene la característica de que la energía de propagación sobre el espacio no se desvanezca debido a la dispersión o disipación.[2]

En la década de los 70's los solitones fueron implementados en la óptica no lineal, además estas ondas son solución en la ecuación de Schrödinger no lineal (NLS)[2]. Los solitones de la ecuación KdV son conocidos como no topológicos porque decaen a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$, para la ecuación NLS los solitones son llamados solitones envolventes y para la solución de la

ecuación de sine-Gordon son conocidos como solitones topológicos porque no decaen a cero cuando su variable espacial se aproxima a infinito [1][5].

La ecuación de sine-Gordon viene de la ecuación de Klein-Gordon la cual es una ecuación que describe el comportamiento de una partícula energética. La ecuación de sine-Gordon fue estudiada por Edmond Bour en 1864 para describir superficies de curvatura negativa, también existe una versión discreta que surgió del modelo de Frenkel y Kontorova, dos investigadores rusos quienes en 1939 usaron este modelo para modelar la propagación de dislocaciones cristalinas [1].

Si consideramos un campo escalar $\theta(x, t)$, la ecuación de Klein-Gordon para una partícula de masa m es

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} = m^2\theta, \quad (1-1)$$

donde θ_{xx} y θ_{tt} significan la doble derivada con respecto a x y t respectivamente, que proviene del siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\theta_x^2 - \theta_t^2) + \frac{1}{2}m^2\theta^2, \quad (1-2)$$

donde θ_x y θ_t significan la primera derivada con respecto a x y t respectivamente. En 1962 Perring y Skyrme introdujeron una no linealidad cambiando θ^2 por $(1 - \cos\theta)$ para un modelo de partículas, y el lagrangiano que se obtiene es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\theta_x^2 - \theta_t^2) + \frac{1}{2}m^2(1 - \cos\theta). \quad (1-3)$$

Introduciendo este lagrangiano en la ecuación de Euler-Lagrange para campos se obtiene la ecuación de movimiento de la partícula que es justamente la ecuación de sine-Gordon clásica

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} - m^2 \sin \theta = 0, \quad (1-4)$$

si consideramos la descripción de una partícula de masa igual a 1 , entonces

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} - \sin \theta = 0, \quad (1-5)$$

el principal propósito de este documento es encontrar la solución analítica de la ecuación de sine-Gordon clásica y estudiar como los solitones son efectivamente una solución a esta ecuación desarrollando los detalles paso a paso.

2 Método del pseudo-potencial. Solución kink y antikink para $E = 2$

Se puede ver que una onda plana que tiene la forma $\theta(x, t) = \theta_0 \cos(kx - \omega t)$ no es una solución de 1-5. Sin embargo, podemos proponer una solución de la forma de una onda viajera viajando con velocidad V y hacer un cambio de variable $\theta(x, y) = \theta(\xi)$ donde

$$\xi = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (2-1)$$

acorde a este cambio de variable la primera y segunda derivada con respecto al tiempo son respectivamente

$$\theta_t = \theta_\xi \frac{d\xi}{dt} = -\frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} \theta_\xi, \quad (2-2)$$

$$\theta_{tt} = \frac{V^2}{1 - V^2} \theta_{\xi\xi}, \quad (2-3)$$

y las derivadas de θ_x y θ_{xx} son

$$\theta_x = \theta_\xi \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \theta_\xi, \quad (2-4)$$

$$\theta_{xx} = \frac{1}{1 - V^2} \theta_{\xi\xi}, \quad (2-5)$$

sustituyendo 2-3 y 2-5 en 1-5 y simplificando se obtiene

$$\theta_{\xi\xi} = \text{sen}\theta = -\frac{d}{d\theta}[1 + \cos\theta]. \quad (2-6)$$

La ecuación 2-6 se puede entender como la segunda ley de Newton para una partícula puntual de masa 1 con un potencial de $\Theta(\theta) = 1 + \cos\theta$ este potencial se traslada sumado 1 para que así el potencial no tenga valores negativos, y por lo tanto los puntos de equilibrio son $\theta_n = n\pi$ con $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. A este potencial se le conoce como pseudo-potencial, por eso este método para encontrar la solución de la ecuación de sine-Gordon se le conoce como el método del pseudo-potencial. De esta última ecuación 2-6 al integrar se obtiene

$$E = \frac{1}{2} \theta_\xi^2 + 1 + \cos\theta, \quad (2-7)$$

en un contexto de una partícula la constante $E \geq 0$ la cual representa la energía total que es la suma de la energía cinética más la energía potencial, despejando θ_ξ de 2-7

$$\theta_\xi = \pm\sqrt{2}\sqrt{E - [1 + \cos\theta]}, \quad (2-8)$$

esta función representa la velocidad de la partícula en los puntos de equilibrio $\theta_n = n\pi$, $\Theta(n\pi) = 1 + (-1)^n$, lo que significa que cuando n es par $\Theta = 2$, alcanza su valor máximo y el punto de equilibrio es inestable. Si el valor de n es impar el potencial es mínimo y $\Theta = 0$ y el punto de equilibrio es estable. Por tanto existen 3 casos posibles

$$0 \leq E < 2, \quad (2-9)$$

$$E = 2, \quad (2-10)$$

$$E > 2. \quad (2-11)$$

Si en la ecuación 2-7 fijamos $E = 2$, entonces

$$\frac{\theta_\xi^2}{2} = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad (2-12)$$

$$\theta_\xi^2 = 4\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad (2-13)$$

$$\theta_\xi = \pm 2\sin\frac{\theta}{2}, \quad (2-14)$$

la parte positiva corresponde a la solución kink y la negativa a la solución antikink, separando las variables

$$\frac{\frac{d\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \pm d\xi, \quad (2-15)$$

llamando $y = \frac{\theta}{2}$ al integrar

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \pm \int d\xi, \quad (2-16)$$

la solución a la integral es

$$\begin{aligned} \ln \sin \frac{y}{2} - \ln \cos \frac{y}{2} &= \pm (\xi - \xi_0) \\ \ln \tan \frac{\theta}{4} &= \pm (\xi - \xi_0) \\ \tan \frac{\theta}{4} &= e^{\pm(\xi - \xi_0)}, \end{aligned} \quad (2-17)$$

donde ξ_0 es la constante de integración, finalmente

$$\theta_+(\xi) = 4 \arctan e^{\xi - \xi_0} \quad (2-18)$$

$$\theta_-(\xi) = 4 \arctan e^{\xi_0 - \xi}, \quad (2-19)$$

$\xi(x, t) = \frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2}}$ y $\xi_0(x, 0) = \frac{x_0}{\sqrt{1-V^2}}$, los signos $+$ y $-$ corresponden a la solución tipo kink y antikink respectivamente, en las variables originales x y t

$$\theta_+(x, t) = \arctan e^{\frac{x-x_0-Vt}{\sqrt{1-V^2}}}, \quad (2-20)$$

$$\theta_-(x, t) = \arctan e^{-\frac{x-x_0-Vt}{\sqrt{1-V^2}}}, \quad (2-21)$$

la ecuación de sine-Gordon es invariante si x se sustituye por $-x$ (esto implica que x_0 se reemplaza por $-x_0$) y t y $-t$, debido a esta simetría, a partir de de la solución kink 2-20 se puede obtener la solución antikink 2-21.

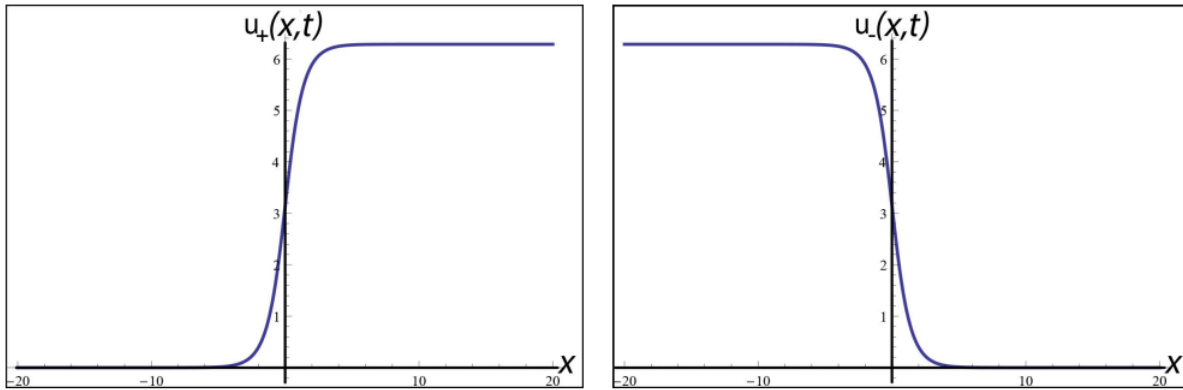


Figura 2-1: graficas del kink (izquierda) y antikink (derecha) en un instante fijo de tiempo, donde la notación corresponde a $u_+(x, t) = \theta_+(x, t)$ y $u_-(x, t) = \theta_-(x, t)$. Tomado de [1]

Si $E = 2$ entonces la partícula esta en un punto de equilibrio inestable $u = 0$ y su velocidad es cero por tanto su energía cinética es cero. La partícula va cayendo en el potencial $(1 + \cos \theta)$, adquiriendo energía cinética y perdiendo energía potencial hasta que llega al punto de equilibrio estable donde $\theta = \pi$, donde su energía cinética es máxima y su energía potencial es mínima, sube el pozo de potencial perdiendo energía cinética y ganando energía potencial hasta el punto $\theta = 2\pi$.

Como los solitones provienen de ondas no lineales, las cuales el principio de superposición no se cumple se tiene que la suma del kink más el antikink no es solución de la ecuación de sine-Gordon.

3 Soluciones exactas no localizadas en el espacio $E \neq 2$

Para el caso en que la energía $0 \leq E < 2$, para este caso se necesita la siguiente identidad trigonométrica

$$1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (3-1)$$

y se denota como

$$\frac{E}{2} = k^2, \quad (3-2)$$

esta relación implica que $0 \leq k^2 < 1$. Así, la ecuación 2-7 se convierte en

$$\theta_\xi^2 = 4 \left(k^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (3-3)$$

de aquí se tiene la restricción para el movimiento $k^2 \geq \cos^2 \frac{\theta}{2}$ que se puede reescribir como $2 \arccos k \geq \theta \geq 2\pi - 2 \arccos k$.

Realizamos un cambio de variable sin pérdida de generalidad

$$\cos \frac{\theta}{2} = k \sin \phi, \quad (3-4)$$

antes de seguir hay que resaltar que cuando θ tiende a $2 \arccos k$, entonces $\sin \phi$ tiende a 1 y por tanto ϕ tiende a $\frac{\pi}{2}$. Para cuando θ tiende a $2\pi - 2 \arccos k$, $\sin \phi$ tiende a -1 y por tanto ϕ tiende a $-\frac{\pi}{2}$, se concluye que $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Derivando esta expresión se obtiene

$$-\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = k \cos \phi d\phi, \quad (3-5)$$

al dividir por $d\xi$ y elevar al cuadrado se obtiene la siguiente relación

$$\left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{k^2 \cos^2 \phi} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2. \quad (3-6)$$

Reemplazando las ecuaciones 3-4 y 3-5 en 3-6, además utilizando la identidad

$$k^2 \cos^2 \phi = k^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (3-7)$$

se obtiene

$$\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 - k^2 \sin^2 \phi. \quad (3-8)$$

Por lo tanto

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}, \quad (3-9)$$

separando las variables e integrando

$$\xi = \int_0^\xi d\xi' = \int_0^\phi \frac{d\phi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi'}}, \quad (3-10)$$

para este paso se toma en cuenta unas consideraciones, la primera es que donde $\xi = 0$ entonces $\phi = 0$.

La segunda consideración es que se toma el signo positivo debido a que si ξ se considera como una variable de tiempo que puede tomar signos negativos no hay problema en tomar el signo positivo.

La tercera consideración a resaltar es que la integral 3-10 es conocida como una integral elíptica de primer especie con modulo k y representa el tiempo ξ en función del ángulo ϕ . La función inversa que define el ángulo ϕ en función de la variable ξ ($\phi(\xi)$), se conoce como amplitud de Jacobi para $0 \leq k \leq 1$.

La amplitud de Jacobi es periódica y su periodo es

$$T = 4K(k) = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}. \quad (3-11)$$

Si volvemos a las variables originales de la ecuación 3-4 obtenemos

$$\theta(\xi) = 2 \arccos k \sin \phi(\xi). \quad (3-12)$$

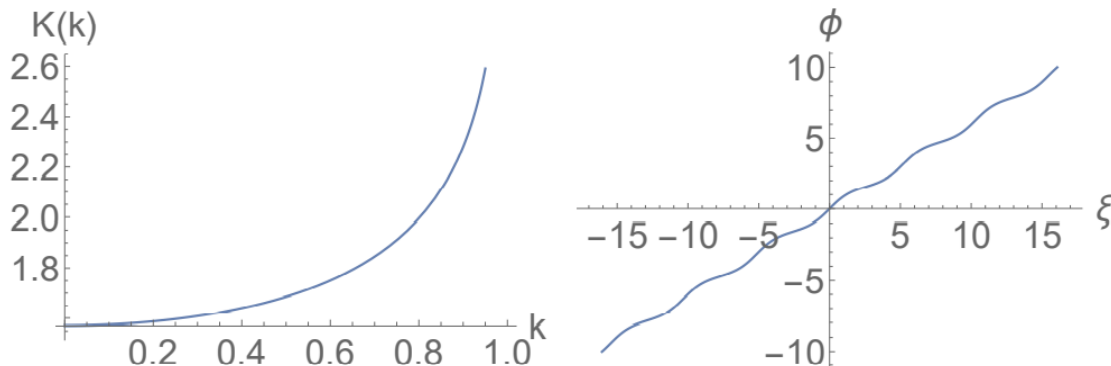


Figura 3-1: integral $K(k)$ (izquierda) e integral de Jacobi (derecha). Tomado de [1]

Para el caso $E > 2$ se hace un proceso parecido al anterior y conviene definir

$$\frac{2}{E} = k'^2, \quad (3-13)$$

entonces la ecuación 2-7 se transforma

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 1 - k'^2 \sin^2 y, \quad (3-14)$$

donde $y = \frac{\theta + \pi}{2}$ y $z = \frac{\xi}{k'}$. Si nuevamente tomamos el signo positivo y suponemos que cuando $z=0$, $y=0$, entonces

$$z = \int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 y'}}, \quad (3-15)$$

y su inversa corresponde a $y(z, k')$, volviendo a las variables originales se obtiene

$$\theta(\xi) = -\pi + 2y\left(\frac{\xi}{k'}, k'\right). \quad (3-16)$$

4 Leyes de conservación e invarianza de Lorentz

A partir del lagrangiano del sistema se pueden observar unas simetrías del sistema y por el teorema de Noether sabemos que para las simetría temporales esta relacionado con una cantidad conservada que es la energía, la simetría bajo traslaciones espaciales se relacionan con la conservación del momento lineal y existe una cantidad conservada que se obtiene a partir de lo que se conoce como el tensor de energía-momento que se define como

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (4-1)$$

donde \mathcal{L} es el lagrangiano del sistema, Φ es un campo escalar y $g_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski. El tensor de energía-momento cumple con

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (4-2)$$

y se encuentra una cantidad conservada

$$Q_\nu = \int T_{0\nu} d^3 \vec{x}, \quad (4-3)$$

luego usando el lagrangiano de la ecuación de sine-Gordon se define la carga topológica como

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} dx \theta_x = \theta(\infty, t) - \theta(-\infty, t) = \pm 2\pi. \quad (4-4)$$

El kink con carga tótopológica 2π , mientras que el antikink con carga -2π .

El momento se define como

$$P = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \theta_x \theta_t, \quad (4-5)$$

donde $-\theta_x \theta_t$ es la densidad de momento, el momento se conserva debido a que la derivada con respecto al tiempo es

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} dx (-\theta_x \theta_t) = 0, \quad (4-6)$$

entonces $\frac{dP}{dt} = 0$. Si se sustituye la solución kink 2-20 y la solución antikink 2-21 en la definición de momento 4-5 y teniendo que

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{4e^\alpha}{1+e^\alpha} \frac{\pm 1}{\sqrt{1-V^2}} = \pm \frac{2}{\sqrt{1-V^2}} \frac{1}{\cosh \alpha}, \\ \theta_t &= \frac{4e^\alpha}{1+e^\alpha} \frac{\mp V}{\sqrt{1-V^2}} = \mp \frac{2V}{\sqrt{1-V^2}} \frac{1}{\cosh \alpha},\end{aligned}\tag{4-7}$$

donde

$$\alpha = \frac{x - x_0 - Vt}{\sqrt{1-V^2}},\tag{4-8}$$

y

$$d\alpha = \frac{dx}{\sqrt{1-V^2}},\tag{4-9}$$

se obtiene la expresión para el momento

$$P = \frac{4V}{\sqrt{1-V^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\cosh^2 \alpha} = \frac{8V}{\sqrt{1-V^2}},\tag{4-10}$$

esta expresión corresponde al momento de una partícula relativista con masa relativista de

$$M = \frac{8}{\sqrt{1-V^2}}.\tag{4-11}$$

La energía esta definida como

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\theta_x^2}{2} + \frac{\theta_t^2}{2} + 1 - \cos \theta \right\}\tag{4-12}$$

derivando con respecto al tiempo se llega a

$$\frac{dH}{dt} = [\theta_t - \theta_x]_{-\infty}^{\infty} = 0.\tag{4-13}$$

Por tanto, la energía es una constante del sistema. Si se sustituyen la solución kink 2-20 y la solución antikink 2-21 en la expresión de la energía en 4-12 se tiene

$$H = \frac{8}{1-V^2},\tag{4-14}$$

de las ecuaciones 4-11 y 4-14 se encuentra la relación de la energía con la masa relativista $H = \gamma M$, donde γ es el factor de Lorentz.

La ecuación de sine-Gordon es invariante con la siguiente transformaciones de Lorentz

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2}},\tag{4-15}$$

$$t' = \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (4-16)$$

teniendo en consideración

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} \frac{\partial}{\partial t'}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} \frac{\partial}{\partial x'}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{1}{1 - V^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{V^2}{1 - V^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2V}{1 - V^2} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{1 - V^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{V^2}{1 - V^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{2V}{1 - V^2} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'}, \end{aligned} \quad (4-17)$$

y de esta manera se encuentra que

$$\theta_{tt} - \theta_{xx} + \sin \theta = \theta_{t't'} - \theta_{x'x'} + \sin \theta = 0, \quad (4-18)$$

una de las propiedades más importantes de que la ecuación de sine-Gordon es invariante Lorentz es que se puede estudiar la solución de sine-Gordon estacionaria, el cual es el kink estático y al aplicar la transformación 4-15, se obtiene la solución tipo onda viajera que se propaga con velocidad V . Entonces, la ecuación de sine-Gordon es invariante bajo traslación temporales $t' = t + a$ y espaciales $x' = x + b$ donde a y b son constantes arbitrarias, además, estas simetrías están relacionadas con la conservación de la energía y momento lineal respectivamente.

5 Estabilidad del soliton

La estabilidad del soliton se puede estudiar mediante la solución tipo kink y sera similar para la solución antikink, como se mencionó en la sección anterior la solución de la ecuación de sine-Gordon se puede linearizar entorno al kink estático, por tanto

$$\theta(x, t) = \theta_+(x, 0) + \epsilon\psi(x, t) + O(\epsilon^2), \quad (5-1)$$

donde $\psi(x, t)$ es una función desconocida y ϵ es el parámetro que acompaña la perturbación. Sustituimos esta solución en la ecuación de sine-Gordon y hasta orden $O(\epsilon)$ se obtiene

$$\epsilon[\psi_{tt} - \psi_{xx} + \cos \theta_+ \psi] - \theta_{+xx} + \sin \theta_+ = 0, \quad (5-2)$$

de esta última expresión de orden $O(\epsilon)$ se tiene que

$$\theta_{+xx} = \sin \theta_+, \quad (5-3)$$

y que

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + \cos \theta_+ \psi = 0, \quad (5-4)$$

si suponemos la solución de esta ecuación diferencial de la forma $\psi(x, t) = e^{-i\omega t}\phi(x)$ donde ω es la frecuencia asociada al problema de Sturm-Liouville, entonces al introducir esta solución en 5-4 se obtiene

$$\phi_{xx} - \cos \theta_+ \phi + \omega^2 \phi = 0, \quad (5-5)$$

con la ecuación 5-4 integramos con respecto al tiempo y tomando como constante de integración igual a 1 por conveniencia se obtiene

$$\frac{\theta_{+x}^2}{2} = 1 - \cos \theta_+, \quad (5-6)$$

despejando $\cos \theta_+$ de 5-6 y denotando $\lambda = \omega^2 - 1$ la ecuación se reduce

$$\phi_{xx} + \left(\lambda + \frac{\theta_{+x}^2}{2} \right) \phi = 0, \quad (5-7)$$

esta ultima ecuación representa el problema de Sturm-Liouville, donde las incógnitas son los posibles λ y las posibles funciones ϕ que son solución a la ecuación diferencial.

Suponemos una solución de la forma

$$\phi(x) = e^{ikx}F(x), \quad (5-8)$$

donde $F(x)$ se desconoce por el momento, introduciendo esta solución en 5-7 se obtiene que

$$F(x) = -ik + \tanh x, \quad (5-9)$$

sustituyendo 5-9 en 5-8

$$\phi(x) = e^{ikx}(-ik + \tanh x) = \phi_k(x), \quad (5-10)$$

reemplazando en la perturbación $\psi(x, t)$, el espectro continuo esta relacionado con la parte real de la función

$$\psi_k(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}(-ik + \tanh x), \quad (5-11)$$

donde $\omega = \sqrt{1 + k^2}$ para todo $k \in \Re$, estas expresiones son solución al problema Sturm-Liouville y define el espectro que se muestra en la figura **5-1**

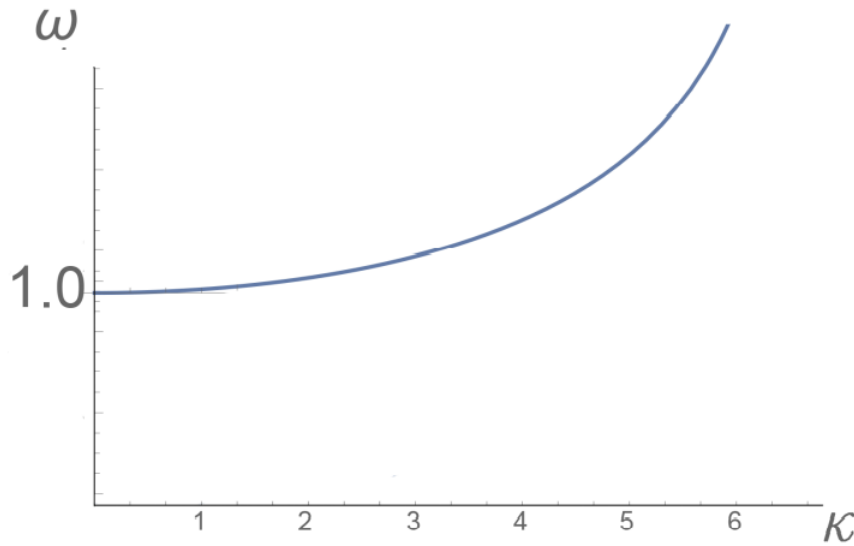


Figura 5-1: espectro continuo $k > 0$. Corresponde al espectro de una partícula relativista. Tomado de [1]

como $\psi_k(x, t)$ es una función periódica del tiempo y por tanto acotada, se concluye que es estable la solución kink, similarmente se puede hacer el mismo proceso análogo para la solución antikink y demostrar que también es estable. Esto significa que a pequeñas perturbaciones tanto al kink como el antikink no ocasionaran su destrucción.

6 Conclusiones

En el documento se realizó un estudio histórico en la introducción de como los solitones surgieron en la solución de la ecuación que describe una onda mecánica en el agua de un canal, su definición y el porqué son importantes en diferentes campos de investigación. Se obtuvo la solución exacta a la ecuación de sine-Gordon, también se estudió las leyes de conservación con algunas simetrías de este sistema que corresponde a la de una partícula relativista y finalmente se estudió la estabilidad de las soluciones solitónicas.

En la solución exacta de la ecuación de sine-Gordon se implementó el método del pseudo-potencial para estudiar tres regímenes donde la energía total del sistema determina el tipo de solución de la ecuación de sine-Gordon, para el caso de $E = 2$ resultó en que las soluciones venían en términos de los solitones kink y antikink donde la superposición de estas soluciones no es solución de sine-Gordon debido a la no linealidad de la ecuación, mientras que para los regímenes de energía donde $0 \leq E < 2$ y $E > 2$ las soluciones estaban en términos de las integrales de Jacobi.

En la sección de leyes de conservación e invarianza de Lorentz se demostró que la ecuación de sine-Gordon cumple con simetría de lo que se define como carga topológica para la solución kink y antikink, también existe simetría en traslaciones temporales y espaciales relacionadas con la conservación de energía y momento lineal del sistema. A partir de la propiedad de que la solución se puede linealizar con la solución del kink estático se estudió la estabilidad del soliton que corresponde a la solución del problema de Sturm-Liouville de una ecuación diferencial, concluyendo la estabilidad tanto para el kink como el antikink lo que ocasiona que pequeñas perturbaciones como fuerzas externas al sistema o errores numéricos acumulados no causarían la desestabilización del sistema.

Bibliografía

- [1] J. S. Boza, “Proyecto fin de máster máster en diseño avanzado en ingeniería mecánica,”
- [2] M. A. Agüero Granados and V. N. Serkin, *Introducción a la teoría de solitones*. Ediciones y Gráficos Eón, SA de CV, 2020.
- [3] S. Mandelstam, “Soliton operators for the quantized sine-gordon equation,” in *Bosonization*, pp. 138–142, World Scientific, 1994.
- [4] M. A. Akbar, L. Akinyemi, S.-W. Yao, A. Jhangeer, H. Rezazadeh, M. M. Khater, H. Ahmad, and M. Inc, “Soliton solutions to the boussinesq equation through sine-gordon method and kudryashov method,” *Results in Physics*, vol. 25, p. 104228, 2021.
- [5] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, “Method for solving the sine-gordon equation,” *Physical Review Letters*, vol. 30, no. 25, p. 1262, 1973.