

# **Equivalencia entre el modelo de Thirring masivo y el modelo de Sine Gordon**

**Brahiam Stiven Suarez Sanchez**

**Dr. Gabriel Tellez Acosta**



Proyecto Teórico-Computacional  
Departamento de física  
Bogota D.C

June 3, 2022



# Contents

<b>Introducción</b>	<b>iii</b>
<b>Desarrollo en serie de perturbaciones para ambos modelos</b>	<b>v</b>
0.0.1    Conceptos previos . . . . .	v
0.1    Calculo de las series perturbativas . . . . .	xi
0.1.1    Desarrollo para el modelo de Sine Gordon . . . . .	xi
0.1.2    Desarrollo para el modelo de Thirring . . . . .	xv
<b>Análisis y conclusiones</b>	<b>xix</b>



# Introducción

La teoría cuántica de campos, es la rama de la física que estudia los sistemas a través de aplicar los principios la mecánica cuántica a las teorías clásicas de campos continuos; teniendo en cuenta los postulados de la relatividad especial propuesta por Albert Einstein en 1905. La principal consecuencia de aplicar los principios cuánticos a campos clásicos es la cuantización de los campos, lo que nos permite entender a los sistemas, como un grupo de partículas el cual no se mantiene constante en el tiempo [1]. Esto implica la creación y aniquilación de estas. Un ejemplo de esto son los decaimientos de partículas o en las aniquilaciones de par electrón-positrón que resulta en la creación de un fotón.

El interés en el desarrollo de la teoría cuántica de campos es el de construir un marco teórico, el cual no presente las limitaciones de la teoría cuántica no relativista. Dando pie a la introducción de nuevas herramientas matemáticas para el desarrollo de una comprensión más acertada de los fenómenos de estudio en la física de partículas elementales. Por ejemplo, el uso los diagramas de Feynmann, los cuales permiten escribir las interacciones entre partículas de forma sencilla y nos permite extraer información del sistema sin grandes cantidades de cálculos dispendiosos [2].

Las teorías cuánticas de campos se pueden dividir en dos tipos. La primera son las teorías gauge abelianas, las cuales están construidas mediante un grupo de simetrías, donde las transformaciones de simetría de los campos forman un grupo abeliano, esto significa que es conmutativo. Un ejemplo de teoría gauge abeliana, es la electrodinámica cuántica, la cual es una teoría de interacciones electromagnéticas para partículas elementales [2]. Por otro lado, están las teorías gauge no abelianas donde el grupo de simetría es no abeliano, ósea, no conmutativo. Este tipo de teorías fueron propuestas por los físicos Yang y Mills en 1954 [3]. Por ejemplo, está la cromodinámica cuántica que describe las interacciones entre los quarks y los gluones por medio de la interacción entre la carga de color [2].

Los modelos de tipo gauge no abelianos presentan una estructura más rica a la hora de describir una gran variedad de nuevos fenómenos, pero presentan un mayor grado de dificultad para resolver las ecuaciones obtenidas para este tipo modelos, comparada con las teorías gauge abelianas [3]. Esto implica que muchos de estos modelos no presentan una solución analítica para las 4 dimensiones usuales, 3 espaciales y 1 temporal. El enfoque que utilizan los físicos para sortear estos problemas, es el estudio de un modelo equivalente al original pero simplificado. Las ventajas que presenta este enfoque son: la obtención de soluciones exactas para estos modelos, disponer de un modelo de

juguete para el desarrollo y la aplicación de varias herramientas matemáticas aplicables para modelos más complejos, la obtención de intuición sobre el comportamiento de las soluciones modelo y finalmente el descubrimiento de características no triviales de este modelo simplificado.

El método de simplificación de interés para este estudio, es el desarrollo de estos modelos en solo 2 dimensiones, 1 espacial y 1 temporal. La consecuencia inmediata más importante de esta simplificación es la pérdida del spin de las partículas, dado a que en este espacio tiempo bidimensional no existen las rotaciones. Por lo tanto, se pueden hallar equivalencias entre modelos fermionicos y modelos bosonicos, mediante un proceso conocido como bosonización de los campos fermionicos, el cual es el procedimiento donde se pone en evidencia la equivalencia entre ambos modelos [3], ya que no existe teorema spin-estadística que impida la construcción de un fermión a partir de los estados coherentes de un campo de Bose [3]. Esta propiedad permitió al físico Sidney Coleman, ser el primero en aplicar este proceso para el modelo de Thirring masivo, modelo de auto interacción entre fermiones con masa, y el modelo de Sine-Gordon, a través del estudio de las series perturbativas de ambos modelos en 1975 [4].

# Desarrollo en serie de perturbaciones para ambos modelos

## 0.0.1 Conceptos previos

### Modelo de Sine-Gordon

El modelo de Sine Gordon es un modelo para un campo escalar en dos dimensiones, 1 espacial y 1 temporal, sin masa el cual presenta oscilaciones del tipo no lineal. Este modelo, al ser de campo escalar, presenta espín cero, por lo tanto, se rige por la estadística de Bose Einstein y respeta las relaciones de conmutación canónicas. Clásicamente, se han obtenido soluciones para este modelo las cuales se conocen como solitones, estas se pueden definir como un frente de onda solitario que se propaga por un medio y el cual preserva su velocidad. Para el caso del modelo de Sine Gordon en teoría cuántica de campos tenemos que su dinámica está descrita por el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi + \gamma_0, \quad (1)$$

donde el término asociado a la energía cinética de este modelo presenta una suma implícita siguiendo la convención de Einstein para la notación covariante. Hablando sobre los parámetros que presenta el modelo, lo primero que se debe mencionar es que todos son reales, para tener una mejor comprensión de estos se realizara un análisis del término de interacción para la configuración de mínima energía. Mediante una expansión en serie de Taylor alrededor centrada en cero.

$$\frac{\alpha_0}{\beta^2} \cos \beta \varphi = \frac{\alpha_0}{\beta^2} - \frac{\alpha_0}{2} \varphi^2 + \frac{\alpha_0 \beta^2}{4!} \varphi^4 - \dots \quad (2)$$

Si se quiere definir el lagrangiano con la densidad mínima de energía, entonces debemos escoger el parámetro de la siguiente forma:

$$\gamma_0 = \frac{\alpha_0}{\beta^2}, \quad (3)$$

de esto concluimos que el parámetro es la densidad de energía arbitraria que describe todas las familias de funcionales que cumplen con la ecuación de Sine Gordon, por lo tanto, puede ser escogido de forma conveniente para definir cuál va a ser la energía mínima del modelo. Ahora analizaremos la ecuación de movimiento de este modelo. Si se aplica la ecuación de Euler Lagrange al Lagrangiano de Sine-Gordon, tenemos la

siguiente ecuación de movimiento:

$$\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{\alpha_0}{\beta} \sin \beta \varphi = 0. \quad (4)$$

Expandiendo el término sinusoidal a primero orden obtenemos la ecuación de Klein Gordon,

$$\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \alpha_0 \varphi = 0. \quad (5)$$

de esto se concluye que el modelo de Sine Gordon es una extensión no lineal del modelo Klein Gordon. Clásicamente, si es viable hacer la siguiente comparación entre modelos.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= m^2, \\ \sqrt{\alpha_0} &= m. \end{aligned}$$

En este caso el parámetro  $\alpha_0$  representa el inverso al cuadrado de la longitud de onda de las pequeñas oscilaciones alrededor del mínimo. El parámetro  $\beta$  es la constante de acoplamiento del modelo, el cual da la intensidad de las interacciones entre estas pequeñas oscilaciones. Finalmente, gracias a las simetrías presentes en este lagrangiano, como lo son su paridad e invariancia ante traslaciones en factores de  $\pi/2$  podemos tomar los parámetros  $\alpha_0$  y  $\beta$  como positivos siempre.

### Modelo de Thirring

El modelo de Thirring, es un modelo para un campo de Dirac en dos dimensiones, 1 espacial y 1 una temporal, el cual está enfocado en describir las auto interacciones entre un campo de Dirac, cuyos fermiones no presentan masas. Este modelo al describir un campo de Dirac presenta espín 1/2, por lo tanto, obedece la estadística de Fermi Dirac y respeta las relaciones de anti conmutación canónicas. El lagrangiano que describe la dinámica de este modelo es:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi + \frac{1}{2} g j^\mu j_\mu, \quad (6)$$

donde  $\psi$  es el espinor de Dirac,  $\gamma_\mu$  son las matrices de Dirac y  $g$  es la constante de acoplamiento. En este caso el término de interacción está dado por el siguiente producto

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (7)$$

Este modelo puede extenderse para definir un modelo masivo de Thirring que ahora tiene en cuenta la masa de los fermiones, es necesario recordad que aún se va a mantener el estudio en dos dimensiones. El término que representa la masa se puede definir simplemente de la siguiente forma:

$$m' \sigma = m' Z \bar{\psi} \psi, \quad (8)$$

donde  $Z$  es una constante definida según el corte arbitrario que se realiza en la energía de las partículas. Si añadimos este nuevo termino al lagrangiano del modelo de Thirring obtenemos



$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma_{\mu} \partial^{\mu} \psi + \frac{1}{2} g j^{\mu} j_{\mu} - m' \sigma. \quad (9)$$

Es importante mencionar que estos modelos presentan soluciones analíticas. Estudiando la solución analítica para el modelo masivo de Thirring es otra forma de comprobar la relación de este modelo y el de Sine Gordon.

### Imagen de Schrödinger

En mecánica cuántica, una vez se considera la evolución temporal de los sistemas, surge una pregunta interesante sobre los vectores de estado y los operadores que actúan sobre estos. Esta pregunta es ¿qué es lo que evoluciona temporalmente, los estados o los operadores? En este texto se trabajará en la imagen de Schrödinger. La plantea que son los estados los que evolucionan con el tiempo mientras que los operadores se mantienen constantes.

### Operador de campo libre y densidad de momento

Es necesario introducir las soluciones de campo libre para la ecuación de Klein Gordon. En este caso, para hallar una solución explícita de esta ecuación se puede usar la transformada de Fourier para analizar esta ecuación en el espacio de momentos, por lo que una vez se transforma la ecuación se obtiene lo siguiente

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \right) \varphi(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (10)$$

$$\left( |\mathbf{k}|^2 + m^2 \right) = \omega_{\mathbf{k}}^2. \quad (11)$$

Se observa que en el espacio de momentos esta ecuación se transforma en la ecuación para un oscilador armónico, por lo tanto, podemos expresar el campo y la densidad de momento en términos de los operadores de creación y aniquilación y la transformada inversa de Fourier

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k},m}}} \left( a_{\mathbf{k},m} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k},m}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (12)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = i \int \frac{d^3 k}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k},m}}{2}} \left( a_{\mathbf{k},m} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{k},m}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right). \quad (13)$$

Según la definición anterior del campo libre y la densidad de momento canónica, se observa que a diferencia de mecánica cuántica no relativista ya no se puede interpretar al campo como una función de onda. En este caso la interpretación de estos objetos es la de operadores que actúan sobre los estados de Fock, por lo tanto, debemos definir cuáles son las relaciones de conmutación que respeta

$$[a_{\mathbf{k},m}, a_{\mathbf{k}',m}] = 0 \quad (14)$$

$$[a_{\mathbf{k},m}^\dagger, a_{\mathbf{k}',m}^\dagger] = 0 \quad (15)$$

$$[a_{\mathbf{k},m}, a_{\mathbf{k}',m}^\dagger] = 2\pi\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (16)$$

$$[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}'). \quad (17)$$

Es importante mencionar que se está trabajando con unidades naturales, por lo que no aparecen factores como la velocidad de la luz o la constante de Planck reducida.

### Divergencias en las expansiones perturbativas

Para el estudio de las series perturbativas de las funciones de green de ambos modelos, se debe tener en cuenta en que caso los términos de estas series pueden presentar divergencias, lo cual se ve reflejado al estudiar los diagramas de Feynman. En este caso, las divergencias que se deben tratar son las que están asociadas a los diagramas de Feynman que presenten un bucle 1. Esto es así, ya que al aplicar conservación de momento se observa que el momento asociado al bucle no está especificado, por lo que se debe realizar una integral sobre todos los posibles valores de momento que la contribución del bucle puede tener.

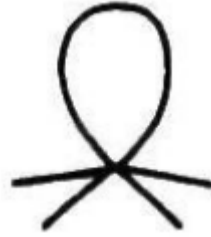


Figure 1: Diagrama de Feynman con un bucle que presenta divergencia. Tomado de [4]

La primera región es la ultravioleta, esta se relaciona con altos valores de momento ( $k \rightarrow \infty$ ) y presenta divergencias, ya que la integral asociada a la contribución del momento de ese bucle es divergente logarítmicamente

$$l = \int \frac{d^2k}{k^2 + \mu^2}, \quad (18)$$

donde esta integral es la contribución del momento para el diagrama y el parámetro  $\mu$  es la masa de la partícula. La segunda región es la Infrarroja y está asociada a valores bajos de momento ( $k \rightarrow 0$ ). Esta divergencia se presenta generalmente para partículas sin masa ( $\mu = 0$ ), donde la integral asociada a la contribución del momento es

$$l = \int \frac{d^2k}{k^2}. \quad (19)$$

Puesto a que ambos modelos no presentan términos de interacción que involucren derivadas, entonces las únicas divergencias que pueden presentar estos modelos en sus expansiones perturbativas son las expuestas anteriormente.

## Tratamiento de divergencias ultravioleta

Gracias a la representación del operador del campo libre en función de los operadores de creación y aniquilación. Mediante las integrales de Fourier es posible descomponer el operador de campo libre en la superposición de dos campos. Un campo asociado a las componentes de frecuencia negativa, relacionado con el operador de destrucción, y un campo asociado a las componentes positivas, relacionados con el operador de creación

$$\varphi^+(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k},m}}} a_{\mathbf{k},m}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (20)$$

$$\varphi^-(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k},m}}} a_{\mathbf{k},m} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (21)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^+(\mathbf{x}) + \varphi^-(\mathbf{x}) \quad (22)$$

Esto significa que se puede representar el producto de varios campos como una suma de productos entre las componentes de frecuencia positiva y negativa de estos campos. Para ejemplificar esto veremos el caso con dos campos.

$$\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x})^+\varphi(\mathbf{y})^+ + \varphi(\mathbf{x})^+\varphi(\mathbf{y})^- + \varphi(\mathbf{x})^-\varphi(\mathbf{y})^+ + \varphi(\mathbf{x})^-\varphi(\mathbf{y})^- \quad (23)$$

Un método para facilitar este tipo de cálculos es introducir un orden normal para estos operadores. El orden normal está definido como un operador lineal que actúa sobre el producto de operadores de creación y aniquilación, moviendo a la izquierda de los operadores de aniquilación a todos los operadores de creación, un ejemplo de esto es:

$$N(a_{\mathbf{p},m} a_{\mathbf{k},m}^\dagger a_{\mathbf{q},m}) := a_{\mathbf{k},m}^\dagger a_{\mathbf{p},m} a_{\mathbf{q},m}.$$

Es posible escribir un producto de campos libres en función de su orden normal y esto se logra mediante aplicar las relaciones de conmutación entre los operadores de aniquilación y creación. Para el caso de dos campos se ve de la siguiente forma:

$$\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}) = N_m(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})) + [\varphi(\mathbf{x})^+, \varphi(\mathbf{y})^-]_m, \quad (24)$$

donde se introduce un parámetro de masa  $m$  asociado al proceso de orden normal. Para hallar el valor esperado de estos productos de campos en el vacío es necesario tener en cuenta que los operadores de campo estén ordenados temporalmente para que se respete la causalidad. Por lo que se introduce el operador de orden temporal  $T$  el cual actúa sobre el producto de campos de la siguiente forma

$$T(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})) = \theta(x^0 - y^0)\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}) + \theta(y^0 - x^0)\varphi(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{x}). \quad (25)$$

En este caso tenemos que  $\theta(x)$  es la distribución de Heaviside y  $x^0, y^0$  son las coordenadas temporales del 4-vector de posición del campo. Con esto el valor esperado del vacío en este producto ordenado temporalmente es:

$$\langle 0|T(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}))|0\rangle = \langle 0|T[N_m(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}))]|0\rangle + \langle 0|T[\varphi(\mathbf{x})^+, \varphi(\mathbf{y})^-]_m|0\rangle. \quad (26)$$

El valor esperado en el vacío de un producto de campos escalares libres con masa  $\mu$  ordenados temporalmente está definido como el propagador de Feynman entre dos puntos

$$\langle 0|T(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}))|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{d^4k}{k^2 + \mu^2} \quad (27)$$

Para el valor esperado del conmutador entre las frecuencias positivas y negativas para los campos presenta un resultado análogo al anterior, donde su única diferencia se da para el parámetro de masa el cual es  $m$ .

$$\langle 0|T[\varphi(\mathbf{x})^+, \varphi(\mathbf{y})^-]_m|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{d^4k}{k^2 + m^2} \quad (28)$$

Por lo tanto, el valor esperado para el orden normal para el producto de campos ordenados tanto normal como temporalmente se puede escribir de la siguiente forma:

$$\langle 0|T[N_m(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}))]|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{d^4k}{k^2 + \mu^2} - \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{d^4k}{k^2 + m^2} \quad (29)$$

Ya que la divergencia ultravioleta se asocia a evaluar el producto de campos en el mismo punto, tomando el límite cuando  $x$  tiende a  $y$  obtenemos lo siguiente:

$$\langle 0|T[N_m(\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}))]|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + \mu^2} - \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + m^2}, \quad (30)$$

de este resultado se puede obtener la contribución del momento asociado al producto de campos en dos dimensiones teniendo en cuenta el orden normal es:

$$l = \int \frac{d^2k}{k^2 + \mu^2} - \int \frac{d^2k}{k^2 + m^2} \quad (31)$$

El diagrama de Feynman para un bucle para esta contribución del momento es el siguiente.

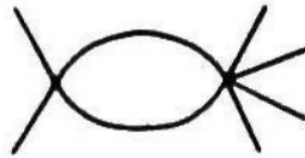


Figure 2: Diagrama de Feynman con un bucle que no presenta divergencia. Tomado de [4]

La principal diferencia entre el diagrama 1 y el diagrama 2 es que el primero presenta una divergencia logarítmica en su contribución de momento, mientras que el segundo no presenta esta divergencia. Lo cual se observa en la expresión para sus respectivas contribuciones. Finalmente, concluimos que el orden normal del producto de campos nos permite lidiar con las divergencias ultravioleta que surgen para el momento en diagramas de Feynman con bucles.

## 0.1 Calculo de las series perturbativas

### 0.1.1 Desarrollo para el modelo de Sine Gordon

Lo primero es proponer el hamiltoniano del modelo de Sine Gordon, el cual es de la siguiente forma:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - \frac{\alpha_0}{\beta^2}\cos\beta\varphi - \gamma_0. \quad (32)$$

Ahora separamos el hamiltoniano en dos, el hamiltoniano libre y el hamiltoniano de perturbación de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2, \quad (33)$$

$$\mathcal{H}_p = -\frac{\alpha_0}{\beta^2}\cos\beta\varphi. \quad (34)$$

El siguiente paso es llevar cada uno de los términos de ambos hamiltoniano a su orden normal aplicando la ecuación 24, empezando por el hamiltoniano libre

$$\frac{1}{2}\Pi^2 = \frac{1}{2}N_m(\Pi^2) - [\Pi^+, \Pi^-]_m, \quad (35)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}N_m\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left[\frac{d\varphi^+}{dx}, \frac{d\varphi^-}{dx}\right]_m. \quad (36)$$

Usando la definición de estos operadores de la ecuación 12 hallamos que el conmutador de estos dos operadores obviando los términos de creación y aniquilación, ya que cuando se calculen en el valor esperado en el vacío simplemente darán la identidad, tenemos:

$$[\Pi^+, \Pi^-]_m = -\frac{1}{8\pi} \int \omega_{\mathbf{k},m} dk \quad (37)$$

$$\left[\frac{d\varphi^+}{dx}, \frac{d\varphi^-}{dx}\right]_m = \frac{1}{8\pi} \int \frac{k^2}{\omega_{\mathbf{k},m}} dk. \quad (38)$$

Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones 39 quedan de la siguiente forma

$$\frac{1}{2}\Pi^2 = \frac{1}{2}N_m(\Pi^2) + \frac{1}{8\pi} \int \omega_{\mathbf{k},m} dk, \quad (39)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}N_m\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{8\pi} \int \frac{k^2}{\omega_{\mathbf{k},m}} dk. \quad (40)$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores y recordando que el orden normal es un operador lineal tenemos lo siguiente

$$\mathcal{H}_0 = N_m(\mathcal{H}_0) + E_0(m), \quad (41)$$

donde  $E_0(m)$  explícitamente es

$$E_0(m) = \frac{1}{8\pi} \int \frac{2k^2 + 1}{\omega_{\mathbf{k},m}} dk. \quad (42)$$

Ya que la expresión 42 es divergente aplicaremos un proceso de renormalización en el que definiremos el siguiente parámetro

$$\delta = \delta_0 - E_0(m). \quad (43)$$

Ahora debemos realizar un procedimiento similar para la parte asociada a la perturbación. Lo primero que se hará será considerar una identidad para exponenciales complejas que surge del teorema de Wick. El cual dice que cualquier producto de campos se puede expresar como el orden normal de este producto más todas las contracciones a pares de cada campo por los términos sin contraer

$$e^{i \int J(x)\phi(x)d^2x} = N_m \left( e^{i \int J(x)\phi(x)d^2x} \right) e^{-\frac{1}{2} \int J(x)\Delta(x-y;m)J(y)d^2x d^2y}. \quad (44)$$

Donde  $J(x)$  es una función arbitraria del espacio tiempo, en este caso vamos a considerar exponenciales ordenadas temporalmente del campo libre, entonces la función de correlación entre dos puntos  $\Delta(x-y;m)$  se vuelve el propagador de Feynman el cual para pequeña separaciones espaciales es proporcional a la función de Bessel modificada  $K_0$

$$\Delta(x;m) = -\frac{1}{4\pi} \ln(cm^2x^2) + O(x^2), \quad (45)$$

donde la constante  $c$  está definida de la siguiente forma y depende de la constante de Euler  $\gamma$  y  $m$  es la masa asociada al proceso de orden normal

$$c = \frac{1}{2} e^\gamma. \quad (46)$$

El propagador de la expresión 45 presenta divergencias en el origen, límite ultravioleta, por lo que se redefine de la siguiente forma introduciendo una gran masa  $\Lambda$  de renormalización

$$\Delta(x;m;\Lambda) = \Delta(x;m) - \Delta(x;\Lambda), \quad (47)$$

de esta definición se obtiene el siguiente propagador, el cual no presenta divergencias en ningún punto del espacio

$$\Delta(x;m;\Lambda) = -\frac{1}{4\pi} \ln \left[ \left( \frac{m}{\Lambda} \right)^2 \right]. \quad (48)$$

Tomaremos la expresión 44 y consideraremos que la función  $J(x)$  de tipo delta de Dirac

$$J(x) = \beta \delta(x-y). \quad (49)$$

Realizando ese remplazo obtenemos lo siguiente

$$e^{i\beta\varphi(x)} = N_m \left( e^{i\beta\varphi(x)} \right) e^{-\frac{\beta^2}{2}\Delta(x;m;\Lambda)}, \quad (50)$$

$$e^{i\beta\varphi(x)} = \left( \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}} N_m \left( e^{i\beta\varphi(x)} \right). \quad (51)$$

Ya que uno puede descomponer el término de perturbación en exponenciales complejas, se puede concluir que para renormalizar el término de perturbación se debe definir la siguiente constante renormalizadora

$$\alpha = \alpha_0 \left( \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}}, \quad (52)$$

de lo anterior se sigue que

$$\alpha_0 \cos \beta \varphi = \alpha N_m(\cos \beta \varphi). \quad (53)$$

Puesto a que la masa  $m$  se eligió arbitrariamente, se puede deducir que para cualquier masa debería funcionar el mismo procedimiento, por lo tanto, la relación entre órdenes normales con diferente masa es

$$\alpha_0 \left( \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^{\frac{\beta^2}{4\pi}} N_m(\cos \beta \varphi) = \alpha_0 \left( \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}} N_\mu(\cos \beta \varphi), \quad (54)$$

$$N_m(\cos \beta \varphi) = \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}} N_\mu(\cos \beta \varphi). \quad (55)$$

Se puede realizar un proceso similar para la parte libre del hamiltoniano

$$N_m(\mathcal{H}_0) + E_0(m) = N_\mu(\mathcal{H}_0) + E_0(\mu), \quad (56)$$

$$N_m(\mathcal{H}_0) = N_\mu(\mathcal{H}_0) + E_0(\mu) - E_0(m), \quad (57)$$

$$N_m(\mathcal{H}_0) = N_\mu(\mathcal{H}_0) + \frac{1}{8\pi}(\mu^2 - m^2). \quad (58)$$

Debido a que ya se realizaron las renormalizaciones necesarias, entonces se puede escribir el hamiltoniano en términos de su orden norma de la siguiente forma

$$\mathcal{H} = N_m \left( \mathcal{H}_0 - \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta \varphi - \gamma \right). \quad (59)$$

Este hamiltoniano al pertenecer a un modelo sin masa presenta divergencias en el régimen infrarrojo, por lo que se debe añadir un término de masa a este hamiltoniano y luego tomar el caso particular cuando la masa es igual a cero

$$\mathcal{H} = N_m \left( \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} \cos \beta \varphi - \gamma \right). \quad (60)$$

Empezáremos calculando la función de green de la siguiente función dependiente del campo libre, la cual será de utilidad para el posterior cálculo de la función de green para la parte del hamiltoniano de perturbación

$$G = \left\langle 0; \mu \left| T \prod_j N_m \left( e^{i\beta_j \phi(x_j)} \right) \right| 0; \mu \right\rangle. \quad (61)$$

Usamos el resultado 54 para pasar de la masa  $m$  a la masa  $\mu$

$$G = \left\langle 0; \mu \left| T \prod_j \left( \frac{\mu}{m} \right)^{\frac{\beta_j^2}{8\pi}} N_\mu \left( e^{i\beta_j \phi(x_j)} \right) \right| 0; \mu \right\rangle, \quad (62)$$

$$G = \left( \frac{\mu}{m} \right)^{\frac{\sum \beta_j^2}{8\pi}} \left\langle 0; \mu \left| T \prod_j N_\mu \left( e^{i\beta_j \phi(x_j)} \right) \right| 0; \mu \right\rangle. \quad (63)$$

Restringiremos las posiciones a un régimen local, tal que se cumpla la siguiente condición para las partículas con masa  $\mu$

$$x \ll \frac{1}{\mu}. \quad (64)$$

Para estas distancias tan cortas que se consideran, entonces podemos usar el resultado como el propagador de Feynman y puesto a que todos los productos del campo en el mismo punto se desvanecen gracias al orden normal podemos calcular la función de green usando el teorema de Wick lo da como resultado

$$G = \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right)^{\frac{\sum \beta_i^2}{8\pi}} \prod_{i>j} \left[ c \mu^2 |x_i - x_j|^2 \right]^{\frac{\beta_i \beta_j}{4\pi}}, \quad (65)$$

$$G = (\mu^2)^{\frac{\sum \beta_i^2}{8\pi}} (m^2)^{-\frac{\sum \beta_i^2}{8\pi}} \prod_{i>j} \left[ c \mu^2 |x_i - x_j|^2 \right]^{\frac{\beta_i \beta_j}{4\pi}}, \quad (66)$$

$$G = (\mu^2)^{\frac{\sum \beta_i^2}{8\pi} - 2 \frac{\sum_{i>j} \beta_i \beta_j}{8\pi}} (m^2)^{-\frac{\sum \beta_i^2}{8\pi}} \prod_{i>j} \left[ c |x_i - x_j|^2 \right]^{\frac{\beta_i \beta_j}{4\pi}}. \quad (67)$$

$$(68)$$

Es hora de considerar el caso particular donde  $\mu$  es igual a cero. Para que la serie de perturbaciones de la función de green no de cero es necesario que la potencia a la que esté elevada  $\mu$  sea cero, por lo tanto, se debe cumplir lo siguiente



$$\begin{aligned}\frac{\sum \beta_i^2}{8\pi} - 2 \frac{\sum_{i>j} \beta_i \beta_j}{8\pi} &= 0, \\ \sum_i \beta_i^2 - 2 \sum_{i>j} \beta_i \beta_j &= 0, \\ \left( \sum_i \beta_i \right)^2 &= 0, \\ \sum_i \beta_i &= 0.\end{aligned}$$

De este resultado se obtiene que se debe tener el mismo número de términos  $b_i$  y  $b_j$  para que sus contribuciones sean diferentes de cero, en caso contrario la suma de términos sería diferente de cero por lo que la contribución de ese término tendería a cero.

La función de green que se debe calcular es la de la función generatriz asociada al hamiltoniano de perturbación, por lo tanto, debemos considerar la siguiente expresión.

$$\frac{\alpha}{\beta^2} N_m(\cos \beta \varphi) = \frac{\alpha}{2\beta^2} \left( N_m(e^{i\beta \varphi(x_i)}) + N_m(e^{-i\beta \varphi(y_i)}) \right). \quad (69)$$

Ahora se pone explícitamente el cálculo que se debe hacer para obtener la función de green

$$G = \left\langle 0 \left| T \prod_i e^{\mathcal{H}_p} \right| 0 \right\rangle. \quad (70)$$

Si expandimos esto en una serie de potencias y estamos la condición que se debe tener el mismo número de términos para el producto de campos se llega a la siguiente expresión

$$G = \left( \frac{\alpha}{2\beta^2} \right)^{2n} \left\langle 0 \left| T \prod_{i=1}^n N_m(e^{i\beta_i \varphi(x_i)}) N_m(e^{-i\beta_i \varphi(y_i)}) \right| 0 \right\rangle. \quad (71)$$

Resolviendo este producto mediante el resultado 65 y teniendo en cuenta que ahora se consideran las diferencias entre el campo en  $x_i$  y  $y_j$  se obtiene la siguiente función de green

$$G = \left( \frac{\alpha}{2\beta^2} \right)^{2n} \frac{\prod_{i>j} \left[ (x_i - x_j)^2 (y_i - y_j)^2 c^2 m^4 \right]^{\frac{\beta^2}{4\pi}}}{\prod_{i,j} \left[ (x_i - y_j)^2 c m^2 \right]^{\frac{\beta^2}{4\pi}}}. \quad (72)$$

### 0.1.2 Desarrollo para el modelo de Thirring

caso el término de masa del modelo de Thirring, el cual está definido como la expresión 8. Sabemos que el modelo de thirring es un modelo fermionico y, ya que estamos trabajando en dos dimensiones, debemos definir las matrices de Dirac en terminos de las matrices de Pauli para que satisfagan el álgebra de Clifford

$$\gamma_0 = \sigma_x, \quad (73)$$

$$\gamma_1 = i\sigma_y, \quad (74)$$

$$\gamma_3 = -\sigma_z. \quad (75)$$

Gracias a que los fermiones para el caso libre son invariantes ante cambios quirales podremos hacer una simplificación del término  $\sigma$  en el hamiltoniano de perturbación reescribiéndolo en términos de una nueva base

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x)' = e^{i\gamma_5 \alpha} \psi(x), \quad (76)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)' = \bar{\psi}(x) e^{i\gamma_5 \alpha}. \quad (77)$$

La nueva base se expresa en términos de la matriz de  $\gamma_5$  Dirac de la siguiente forma

$$Zm' \bar{\psi} \psi = Zm' \bar{\psi} \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi + Zm' \bar{\psi} \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi, \quad (78)$$

$$Zm' \bar{\psi} \psi = Zm' \left( \psi_1^\dagger \psi_2 + \psi_2^\dagger \psi_1 \right), \quad (79)$$

donde se está usando la siguiente notación para el espinor de Dirac para 2 dimensiones

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (80)$$

$$\bar{\psi} = (\psi_1^\dagger \quad \psi_2^\dagger). \quad (81)$$

Debido a que esta nueva base presenta divergencias cuando los campos se evalúa en el mismo punto, realizaremos una definición de los elementos de esta base, incluyendo parámetro renormalizador

$$\sigma_+(x) = \lim_{y \rightarrow x} (x - y)^{2k} \psi_1^\dagger \psi_2, \quad (82)$$

$$\sigma_-(x) = \lim_{y \rightarrow x} (x - y)^{2k} \psi_2^\dagger \psi_1, \quad (83)$$

donde el parámetro  $k$  es un parámetro de Klaiber [5] el cual está definido en función de la constante de acoplamiento  $g$ .

$$k = \frac{g}{4\pi} \frac{2\pi + g}{\pi + g}. \quad (84)$$

B. Klaiber realizó el cálculo de la función de green para el modelo de Thirring [5], hallando que esta es proporcional a 1 sobre la diferencia de posiciones cuando los campos son distintos y directamente proporcionales cuando es el mismo campo evaluado en la misma posición. Sumado a esto también obtuvo que para el producto evaluado se necesitaba que el producto de campos tuviera el mismo número de términos, por lo que usando la notación de Coleman [4] se llega a que el resultado para esa serie es:

$$G = \left\langle 0 \left| T \prod_{i=1}^n \sigma_{-}(x_i) \sigma_{+}(y_j) \right| 0 \right\rangle, \quad (85)$$

$$G = \left( \frac{m'}{2} \right)^{2n} \frac{\prod_{i>j} [(x_i - x_j)^2 (y_i - y_j)^2 M^4]^{1+\frac{b}{\pi}}}{\prod_{i,j} [(x_i - y_j)^2 M^2]^{1+\frac{b}{\pi}}}, \quad (86)$$

donde el parámetro  $M$  está asociada a los procesos de renormalización de la base  $\sigma_{+}(x), \sigma_{-}(x)$ , y el parámetro  $b$  es otro parámetro de Klaiber el cual está definido en términos de la constante de acoplamiento  $g$

$$b = -\frac{g}{1 + \frac{g}{\pi}} \quad (87)$$



# Análisis y conclusiones

Una vez obtenidas ambas series de perturbación para ambos modelos, se puede observar que ambas series son las mismas para sus términos de perturbación si se realizan las siguientes relaciones entre los términos de una serie y con los de la otra

$$\sigma_{\pm}(x) = -\frac{1}{2}N_m(e^{\pm i\beta\varphi(x)}) \quad (88)$$

$$M^2 = cm^2, \quad (89)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{g}{\pi}} = \frac{\beta^2}{4\pi}, \quad (90)$$

$$m' = \frac{\alpha}{\beta^2}. \quad (91)$$

Con estas identificaciones hechas se concluye afirmativamente que ambos hamiltonianos de perturbación son los mismos

$$-m'\sigma = \frac{\alpha}{\beta^2}N_m(\cos\beta\varphi) \quad (92)$$

Gracias a que las constantes de acoplamiento de ambos modelos se pueden relacionar los regímenes de acoplamiento de un modelo con los del otro modelo, los casos más importantes son: el caso donde  $\beta \rightarrow 0$ , ya que  $g \rightarrow \infty$ , por lo tanto, el régimen de acoplamiento de los bosones de Sine Gordon es el régimen de acoplamiento fuerte para el modelo de Thirring, el caso donde  $\beta^2 = 4\pi$ , porque en ese caso  $g = 0$  lo que nos da el régimen de fermiones libres asociado al régimen estándar del modelo de Sine Gordon y finalmente cuando  $\beta^2 \geq 8\pi$  o más, ya que en este caso  $g < 0$ , por lo tanto, la densidad de energía por volumen de los fermiones es tan alta que no tienen estado baso en consecuencia se vuelve al régimen de fermiones libres.

Como comentario final se mencionara que se presentaron dificultades de comprensión de los resultados obtenidos por Klaiber para el modelo de Thirring. Esto se debe principalmente a la dificultad del tema tratado, lo que llevo a varias confusiones a la hora de extrapolarlo al resultado presentado por Coleman. Sumado a eso, la publicación de Klaiber es de 1968, por lo que se maneja una notación diferente a la empleada por Coleman por lo que añade un nuevo grado de dificultad a la hora de entender las ideas tras los cálculos realizados.



# Bibliography

- [1] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley Pub. Co, 1995. ISBN: 9780201503975.
- [2] David J. Griffiths. *Introduction to elementary particles*. 2., rev. ed., 5. reprint. Physics textbook. Wiley-VCH, 2011. ISBN: 9783527406012.
- [3] Carlos Naón. “Equivalencia Entre Modelos Fermiónicos y Bosónicos Bidimensionales: El Método Funcional”. In: (1986). DOI: [10.35537/10915/2392](https://doi.org/10.35537/10915/2392).
- [4] Sidney Coleman. “Quantum sine-gordon equation as the massive Thirring model”. In: *Physical Review D* 11.8 (Apr. 1975), pp. 2088–2097. DOI: [10.1103/physrevd.11.2088](https://doi.org/10.1103/physrevd.11.2088).
- [5] Bernhard Klaiber. “The thirring model”. In: *Lectures in theoretical physics* 10 (1968), pp. 141–176.